数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 45-50

Prime ideal of H^{∞}

新潟大学理学部　泉池　敬司 (KEIJI IZUCHI)

新潟大学大学院　自然科学研究科　　石井　隆 (TAKASHI ISHII)

1　序論

Disk 環のイデアル論は A.Beurling, W.Rudin [1] などにより研究され、多くのことがわかっている。一方、H^{∞} や Douglas argebra のそれは、最近になって、P.Gorkin, R.Mortini 等により、盛んに行われているが、未解決なものも多々ある。ここでは、H^{∞} の prime ideal について、少し論じたい。

2　準備と背景

特に断りのない場合は closed prime ideal を P であらわす。また、イデアル $I\subset H^{\infty}$ の hull を $Z_{H^{\infty}}(I)$ で表わす。すなわち、$Z_{H^{\infty}}(I)=\bigcap_{f\in I}\{x\in M(H^{\infty}); f(x)=0\}$ である。

定義 2.1 $P\subset H^{\infty}$ が *prime ideal* であるとは

$$fg\in P \text{ ならば } f\in P \ \ or \ \ g\in P$$

が成立するときにいう。

特に、maximal ideal は prime ideal である。

次は明らかである。

命題 2.2 $Z_{H^{\infty}}(P)\subset D$ ならば、P は *maximal ideal* である。

また、次が成り立つ。

定理 2.3 *([2, R.Mortini],[3, P.Gorkin, R.Mortini])* $Z_{H^{\infty}}(P)\subset\Gamma$ または、$Z_{H^{\infty}}(P)\subset G$ ならば、P は *maximal ideal* である。ここで、$\Gamma=\{x\in M(H^{\infty})\ ;\ P(x)=\{x\}\}$, $G=\{x\in M(H^{\infty})\ ;\ P(x)\neq\{x\}\}$.

定理 2.4 *(R.Mortini [2])* $Z_{H^{\infty}}(P)\cap M(L^{\infty})\neq\emptyset$ ならば、P は *maximal ideal* である。

non-maximal closed prime ideal の例として、次のものがある。

命題 2.5 *$m \in M(H^\infty) \setminus D$ を non trivial point. $P(m)$ をその Gleason part とすると、*

$$I = \{f \in H^\infty; f = 0 \ \ on \ \ P(m)\}$$

は non-maximal closed prime ideal である。

証明. $fg \in I$ とすると、$fg = 0$ on $P(m)$. すなわち、L_m を Hoffman map とすると、

$$fg \circ L_m(z) = (f \circ L_m)(g \circ L_m)(z) = 0 \text{ on } D.$$

$f \circ L_m$, $g \circ L_m \in H^\infty$ であるから、$f \circ L_m = 0$, or $g \circ L_m = 0$ すなわち、$f = 0$ on $P(m)$ or $g = 0$ on $P(m)$ よって、$f \in I$ or $g \in I$.

命題 2.5. の ideal I の他に non-maximal closed prime ideal は存在しないというのが Alling's conjecture であり、これは未解決であるが、次が成立する。

定理 2.6 *(P.Gorkin. R.Mortini [3]) P を closed prime ideal とすと、*

$$P = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(P))$$

さて、次に closed ではない prime ideal について考える。そのような代表例として、

$$P = (S, S^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{3}} \cdots) \ \ \text{ただし、} \ \ S(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$$

すなわち、$S^{\frac{1}{n}}$ によって生成される ideal がある。この ideal について、

$$\overline{P} = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(P))$$

が成立する。

3 主結果

より一般に我々は次の定理を得た。

定理 3.1 *I を Prime ideal とすると、$\overline{I} = I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(I))$ である。*

証明. Case.I. $Z_\infty(I) \cap M(L^\infty) = \emptyset$. 定理 2.5. の証明がそのまま適用できる。
Case.II. $Z_\infty(I) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$.

$f \in I_{H^\infty}(Z_{H^\infty}(I)), \|f\| = 1.$とする。$f \in \overline{I}$ を示す。$\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ を任意にとる。[4,prop.3] より、open subset $R \subset D$ で次を満たすものがとれる。

$$(3-1) \qquad |f(z)| < \varepsilon \text{ if } z \in R,$$

$$(3-2) \qquad |f(z)| > \delta(\varepsilon) \text{ if } z \in D \setminus R,$$

$$(3-3) \qquad \int_\Gamma |F||dz| \leq C\|F\|_1 \text{ for } F \in H^1.$$

ここで、$\Gamma = \partial R \cap D,\ 0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon,\ C$ は定数である。

$$Z_{H^\infty}(I) \subset Z_{H^\infty}(f) \subset \{x \in M(H^\infty); |f(z)| < \varepsilon\}$$

であるから、[5,lemma2.5] より、$h \in I, \|h\| = 1$ が存在して、

$$(3-4) \qquad Z_{H^\infty}(h) \subset \{x \in M(H^\infty); |f(z)| < \delta(\varepsilon)\}.$$

とできる。ここで、I が prim ideal であることと、$Z_{H^\infty}(I) \cap M(L^\infty) \neq \emptyset$ であることより、h は outer function としてもよい。さらに、十分大きな n ついて n 乗根を考えれば、

$$(3-5) \qquad |h| \geq 1 - \varepsilon \text{ on } \{x \in M(H^\infty); |f(x)| \geq \delta(\varepsilon)\}$$

といてよい。$E \subset \partial D$ を

$$(3-6) \qquad E = \{e^{i\theta} \in \partial D; |f(e^{i\theta})| \geq 2\varepsilon\}$$

と定めれば、$\delta(\varepsilon) < \varepsilon < 2\varepsilon$ であるから、

$$(3-7) \qquad |h| \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2} \text{ on } E.a.e$$

となる。いま、$D_r = \{z \in D; |z| < r\}$ $(0 < r < 1)$ とし、$G_r = D_r \setminus \overline{R}$ と定義する。コーシーの積分公式と [6] と同様の議論により、

$$(3-8) \qquad \int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz \longrightarrow \int_\Gamma \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz \quad (\text{as } r \to 1)$$

である。さて、

$$\begin{aligned}
\left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_E f(z)F(z)\overline{h(z)} dz \right| &\leq \int_E |f(z)F(z)|\left|\frac{1}{h} - \bar{h}\right||dz| \\
&\leq \int_E |fF| \frac{(1 - |h|^2)}{|h|} |dz| \\
&\leq \int_E |fF| \frac{(1 - |h|)(1 + |h|)}{|h|} |dz| \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \int_E |fF||dz| \\
&\leq 4\varepsilon\|F\|_1
\end{aligned}$$

従って、

$$(3-9) \qquad \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_E f(z)F(z)\bar{h} dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1.$$

また、(3-6) より、
(3 − 10)

$$\left| \int_E f(z)F(z)h\bar{(z)} dz - \int_{\partial D} f(z)F(z)h\bar{(z)} dz \right| \leq \int_{\partial D \setminus E} |f(z)F(z)h\bar{(z)}||dz| \leq 2\varepsilon \|F\|_1.$$

(3-9) と (3-10) により,

$$(3-11) \qquad \left| \int_E \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - \int_{\partial D} fFh\bar{(z)} dz \right| \leq 6\varepsilon \|F\|_1 \ \ (F \in H^1).$$

さて、$E_r \subset \partial D$ を次で定義する。

$$(3-12) \qquad rE_r = \partial G_r \cap \partial D_r$$

このとき、

$$(3-13) \qquad d\theta(E \cap E_r) \longrightarrow d\theta(E) \quad (\text{as } r \to 1)$$

となっている。
G_r の 定義と (3-2),(3-5) より、

$$(3-14) \qquad |\,h\,| \geq 1 - \varepsilon \ \text{ on } G_r.$$

さらに、rEr の定義より、

$$(3-15) \qquad |h| \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2} \ \text{ on } rE_r.$$

従って、(3-15) より、$r \to 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_r \setminus E} \left(\frac{fF}{h} \right)(rz) dz \right| &\leq 2 \int_{\partial D \setminus E} |(fF)(rz)||dz| \\ &\to 2 \int_{\partial D \setminus E} |(fF)(z)||dz| \end{aligned}$$

ゆえに、Eの定義より、

$$\limsup_{r \to 1} \left| \int_{E_r \setminus E} \left(\frac{fF}{h} \right)(rz) dz \right| \leq 4\varepsilon \|F\|_1.$$

さらに、等式

$$\int_{\partial G_r \cap \partial D_r} \frac{f(z)F(z)}{h(z)} dz - r \int_{E_r \cap E} \left(\frac{fF}{h} \right)(rz) dz = r \int_{E_r \setminus E} \left(\frac{fF}{h} \right)(rz) dz$$

であるから、

$$\limsup_{r\to 1}\left|\int_{\partial G_r\cap\partial D_r}\frac{f(z)F(z)}{h(z)}dz - r\int_{E_r\cap E}\left(\frac{fF}{h}\right)(rz)dz\right| \leq 4\varepsilon\|F\|_1 \tag{3-16}$$

また、(3-13) と ルベーグの有界収束定理により、

$$r\int_{E_r\cap E}\left(\frac{fF}{h}\right)(rz)dz \longrightarrow \int_E\left(\frac{fF}{h}\right)(z)dz \quad (\text{as } r\to 1) \tag{3-17}$$

(3-8)(3-11)(3-16)(3-17) より、

$$\left|\int_\Gamma \frac{fF}{h}dz + \int_{\partial D} fF\bar{h}dz\right| \leq 10\varepsilon\|F\|_1 \quad (F\in H_0^1) \tag{3-18}$$

(3-1),(3-2),(3-3),(3-4) より、

$$\left|\int_\Gamma \frac{fF}{h}dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_\Gamma |F||dz| \leq 2C\varepsilon\|F\|_1 \quad (F\in H_0^1) \tag{3-19}$$

従って、(3-18),(3-19) より、

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial D} fF\bar{h}dz\right| &\leq \left|\int_\Gamma \frac{fF}{h}dz\right| + 10\varepsilon\|F\|_1 \\ &\leq (10+2C)\varepsilon\|F\|_1 \quad (F\in H_0^1)\end{aligned}$$

ここで、$L^\infty/H^\infty \cong (H_0^1)^*$ であることから、上の評価を商ノルムでかくと、

$$\|f|h|^2 + hH^\infty\| = \|f\bar{h} + H^\infty\| \leq (10+2C)\varepsilon$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned}\|f + hH^\infty\| &\leq \|f - f|h|^2\| + \|f|h|^2 + hH^\infty\| \\ &\leq \|f(1-|h|^2)\| + (10+2C)\varepsilon \\ &\leq \|2f(1-|h|)\| + (10+2C)\varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon + (10+2C)\varepsilon \\ &\leq (12+2C)\varepsilon\end{aligned}$$

ε は任意であるから、$f\in\bar{P}$. □

References

[1] W. Rudin, The closed ideals in an algebra of analytic functions, Cnadian. J. Math. 9(1957),426-434.

[2] R. Mortini, Closed and prime ideals in the argebras of bounded analytic functions, Bull. Austral. Math. Soc. 35(1987),213-229.

[3] P. Gorkin and R. Mortini, Alling's conjecture on closed prime ideals. J. Funct. Anal. 148(1997),185-190.

[4] J. Bourgain, On finitely generated closed ideals in H^∞, Ann. Inst. Fourier. 35(1985),163-174.

[5] D. Suàrez, Čech cohomology and covering dimension for the H^∞ Maximal ideal space, J. Funct. Anal. 123(1994),233-263.

[6] C. Guillory and D. Sarason, Division in $H^\infty+C$, , Michigan Math. J. 28(1981),178-181.